МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЁВА

УТВЕРЖДАЮ
проректор по научной работе
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва»
______________ П.В. Сенин
_28_ ___09___ 2017 г.

Программа вступительного испытания
по программе подготовки научно-педагогических кадров
в аспирантуре
по направлению подготовки

01.06.01 Математика и механика

Саранск 2017

РАЗРАБОТАНО:
Профессор кафедры прикладной математики,
дифференциальных уравнений и теоретической механики
__________________ Т.Ф. Мамедова
__28__ ____09____ 2017 г.

СОГЛАСОВАНО:
Зав. кафедрой прикладной математики,
дифференциальных уравнений и теоретической механики
__________________Р.В. Жалнин
__28__ ____09____ 2017 г.

Декан факультета математики
и информационных технологий
__________________И.И. Чучаев
__28__ ____09____ 2017 г.

Начальник управления подготовки
кадров высшей квалификации
__________________О.Н. Агеева
__28__ ____09____ 2017

Пояснительная записка

Программа вступительного испытания в аспирантуру по направлению 01.06.01 Математика и механика, профилям «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» разработана на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета и магистратуры.

Поступающий в аспирантуру по направлению 01.06.01 Математика и механика (профили Вещественный, комплексный и функциональный анализ, Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление) должен:

- ***Знать:*** основные понятия, утверждения, проблемы и классические постановки задач вещественного, комплексного и функционального анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем.
- ***Уметь:*** доказывать утверждения функционального анализа, решать задачи функционального анализа, определять тип обыкновенного дифференциального уравнения и постановку задачи для него, ставить задачу об исследовании системы на устойчивость, использовать математические методы и модели для решения прикладных задач.
- ***Владеть:*** аппаратом функционального анализа, методами доказательства утверждений, основными приемами и методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений, начальных и краевых задач для них, основными приемами исследования динамических систем на устойчивость.
- ***Иметь представление:*** о задаче оптимального управления, принципе максимума Понтрягина и его приложениях, о задаче синтеза управления.

Экзаменационный билет на вступительном испытании для данного направления и профиля подготовки содержит три вопроса (два из них по направлению и один по профилю).

Критерии оценки знаний поступающему в аспирантуру

90 и более баллов выставляется поступающему, который:

– показал глубокие и полные знания программного материала;
– четко и ясно излагает материал, грамотно его применяет для решения прикладных задач;
– изучил не только учебную, но и научную литературу, знаком с современными проблемами математики и механики;
– владеет методами научного исследования, способен к самостоятельному накоплению и освоению знаний в ходе дальнейшей научно-исследовательской работы;
– допустил при ответе отдельные неточности, но исправил их после замечания преподавателя.

80 и более баллов выставляется поступающему, который:

– раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой;
– свободно владеет понятийным аппаратом;
– изучил основную литературу;
– допустил при ответе отдельные неточности и пробелы, не исказившие в целом правильного ответа.

70 и более баллов выставляется поступающему, который:

– недостаточно полно ответил на поставленные вопросы в экзаменационном билете;
– усвоил основные категории и положения дисциплины;
– владеет материалом в объеме основной учебной литературы;
– при ответе допускает несущественные ошибки;
– не может аргументировано обосновать свою позицию.

Менее 70 баллов выставляется поступающему, который:

– не знает основного программного материала;
– не владеет понятийным аппаратом специальной дисциплины;
– в ходе ответа допустил существенные ошибки, и не может их исправить после замечания преподавателя.

Содержание программы

Часть 1

Тема 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Меры, измеримые функции, интеграл. Интеграл Лебега. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства $\boldsymbol{L}_p$, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в $\boldsymbol{L}_2$ и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. Интегральные представления аналитических функций.

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Теорема Коши о вычетах. Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Гармонические функции. Гармонические функции, их связь с аналитическими.

Метрические и топологические пространства. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Линейные функционалы и линейные операторы. Теоремы Фредгольма. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций.

Тема 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля – Остроградского, метод вариации постоянных и др.). Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

Динамические системы в метрическом пространстве, банаховом пространстве. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Устойчивость линейных однородных систем. Устойчивость систем с однородными правыми частями. Устойчивость по первому приближению. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теоремы Малкина, Красовского. Устойчивость по отношению к части фазовых переменных. Устойчивость инвариантных множеств. Критерии устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову инвариантного множества в линейном нормированном пространстве. Устойчивость систем по Лагранжу. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем по Лагранжу.

Перечень вопросов к вступительным испытаниям
(для всех профилей подготовки)

1. Меры, измеримые функции, интеграл.
2. Интеграл Лебега.

3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.
4. Интегральные представления аналитических функций.
5. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры).
6. Интегральная формула Коши.
7. Ряды аналитических функций.
8. Особые точки.
9. Метрические и топологические пространства.
10. Принцип сжимающих отображений.
11. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.
12. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
13. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
14. Общая теория линейных уравнений и систем: область существования решения.
15. Фундаментальная матрица, формула Лиувилля – Остроградского.
16. Метод вариации постоянных в теории линейных уравнений и систем.
17. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
18. Устойчивость линейных однородных систем.
19. Устойчивость систем с однородными правыми частями.
20. Устойчивость по первому приближению. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Часть 2.
Профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Множества, метрические пространства. Индикаторы множеств. Открытые и замкнутые множества. Полные пространства. Сепарабельные пространства. Нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Банаховы пространства. Лемма Ф. Рисса. Топологические пространства. Топологические векторные пространства, примеры. Ненормируемые топологические векторные пространства. Пространство линейных ограниченных операторов. Норма оператора. Виды сходимости последовательностей операторов. Сопряженные пространства. Общий вид линейного ограниченного функционала в некоторых нормированных пространствах. Полнота сопряженных пространств. Сопряженные операторы. Скалярное произведение. Примеры. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Предгильбертово и гильбертово пространства. Ортогональные системы. Базисы. Процесс ортогонализации.

Ортогональное дополнение множества. Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств. Спектральная теорема. Неограниченные самосопряженные операторы. Полярное разложение оператора. Диагональные и диагонализируемые операторы в гильбертовых пространствах. Модуль Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Четыре следствия из теоремы Хана- Банаха. Обратимые операторы. Критерий обратимости оператора. Левый обратный и правый обратный операторы. Теорема Неймана об обратном операторе. Спектр оператора. Классификация точек спектра. Теорема Банаха об обратном операторе. Принцип равномерной ограниченности. Следствия принципа равномерной ограниченности для сходящихся последовательностей линейных ограниченных операторов.
Примеры компактных операторов. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерных нормированных пространствах. Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами. Ядро и образ компактного оператора, связь между ними. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма и их применение. Алгоритмы решения уравнений с компактными операторами. Линейный интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра. Обобщенные функции. Пространства основных функций. Примеры пространств обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Преобразования Фурье обобщенных функций. Дифференциальное и интегральное исчисление в нормированных пространствах. Производные по Фреше и по Гато. Общие правила дифференцирования. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Несуществование в бесконечномерных нормированных пространствах меры, согласованной с векторной структурой. Интегрирование по конечномерным множествам. Интеграл по кривой. Первообразная. Экстремумы функционалов. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов функционалов.

Дополнительные вопросы для поступающих по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

1. Сепарабельные пространства.
2. Нормированные пространства.
3. Примеры нормированных пространств.
4. Банаховы пространства.
5. Лемма Ф. Рисса.
6. Топологические пространства.
7. Топологические векторные пространства, примеры.
8. Ненормируемые топологические векторные пространства.

9. Пространство линейных ограниченных операторов.
10. Норма оператора.
11. Виды сходимости последовательностей операторов.
12. Сопряженные пространства.
13. Полнота сопряженных пространств.
14. Сопряженные операторы.
15. Скалярное произведение.
16. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
17. Предгильбертово и гильбертово пространства.
18. Ортогональные системы. Базисы.
19. Производные по Фреше и по Гато.
20. Общие правила дифференцирования.
21. Производные высших порядков. Формула Тейлора.

Часть 3.
Профиль «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Способ Адамса; оценка погрешности и сходимость метода Адамса на примере метода Эйлера. Понятие о методе Рунге-Кутта. Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка о двумя независимыми переменными. Основные виды краевых задач для различных типов уравнений. Понятие о корректности постановки краевых задач. Пример Адамара. Основные понятия теории разностных схем для линейных уравнений в частных производных: сходимость, устойчивость, аппроксимация. Простейшая разностная схема решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. I-ая краевая задача для уравнения теплопроводности, ее физический смысл. Исследование простейших разностных схем для этой задачи.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем. Задачи стабилизации управляемых движений. Второй метод Ляпунова для задач об оптимальной стабилизации. Синтез управления для линейных управляемых систем. Синтез управлений в квазилинейных системах и системах стабилизации.

Дополнительные вопросы для поступающих по профилю «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

1. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
2. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.
4. Динамические системы в метрическом и банаховом пространствах.
5. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теоремы Малкина, Красовского.
6. Устойчивость по отношению к части фазовых переменных.
7. Устойчивость инвариантных множеств. Критерии устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову инвариантного множества в линейном нормированном пространстве (без доказательства).
8. Устойчивость систем по Лагранжу. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем по Лагранжу.
9. Приложение принципа максимума Понтрягина к задачам быстродействия для линейных систем.
10. Задачи стабилизации управляемых движений. Второй метод Ляпунова для задач об оптимальной стабилизации.
11. Синтез управления для линейных управляемых систем.
12. Синтез управлений в квазилинейных системах, системах стабилизации.
13. Теорема существования и единственности решений нормальной системы дифференциальных уравнений.
14. Непрерывная зависимость решений нормальной системы от параметров и начальных данных.
15. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений. Основные свойства решений. Структура фундаментальной матрицы решений.
16. Метод Эйлера и матричный метод интегрирования линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянной матрицей.
17. Изолированные особые точки. Типы особых точек на плоскости дифференциального уравнения:
18. Критерий асимптотической устойчивости линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянной матрицей.
19. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства).
20. Приложение принципа максимума Понтрягина к задачам быстродействия для линейных систем.
21. Задачи стабилизации управляемых движений. Второй метод Ляпунова для задач об оптимальной стабилизации.

22. Синтез управления для линейных управляемых систем.
23. Синтез управлений в квазилинейных системах, системах стабилизации.

Рекомендуемая литература (основная)

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976 (1981).
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (1989).
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967—1968.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975 (1991).
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (1999).
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
9. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V. М.: Физматгиз, 1959.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976 (1985).
12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971г.Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972 г.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998г.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963 г.
15. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985 г.
16. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Издательство иностранной литературы, М.; 1962 г.
17. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980 г.
18. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985 г.

Рекомендуемая литература (дополнительная)

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
3. Еругин Н.П., Штокало И.З. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974.
4. Хартман Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М.: Едиториал УРСС, 2004.
7. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
10. Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973.
11. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959.
12. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости М.: Наука, 1967.
13. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
14. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
15. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Л.: Гостехиздат, 1949.
17. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
18. Леонов Г.А. Введение в теорию управления. СПб: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004.
19. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
20. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.